Theta functions as common eigen functions of Hecke operators

高瀬, 幸一

数理解析研究所講究録
第 843 巻 1993 年 79-90

Theta functions as common eigen functions of Hecke operators

宮城教育大学　高瀬幸一 (Koichi Takase)

1 保型形式とは何か

保型形式を定義するには二通りの方法がある。一つは保型形式を商多様体の vector bundle の global section として定義する。もう一つは保型形式を Hecke 作用素の同時固有関数として定義する。よく知られているように ([Mu, Chap.1]), theta 関数は abelian variety の line bundle の global section であるから、theta 関数は第一の意味で保型形式である。そこで本講の目的は theta 関数を第二の意味でとらえることにある。主結果は定理 3.1 と定理 4.1 である。古典的な保型形式との対比でスローガンを書けば、Siegel modular form は $Sp(n,\mathbb{R})$ の正則離散系列表現に対応し、theta 関数は Heisenberg 群（と unitary 群の半直積）の"正則離散系列表現"に対応する。まず古典的な保型形式に対して上の二通りの定義について説明する。

global sections of vector bundle $Sp(n,\mathbb{R})$ の離散部分群 Γ と正整数 m に対して n 次 Siegel 上半空間 $\mathcal{H}_n$ 上の正則関数 $f:\mathcal{H}_n\to\mathbb{C}$ で変換公式

$$f(\gamma(z))=J(\gamma,z)^m f(z)\quad\text{for }\forall\gamma\in\Gamma$$

を満たすもの全体の成す $\mathbb{C}$-vector space を $M_m(\Gamma)$ と書く。但し $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in Sp(n,\mathbb{R})$ に対して $\gamma(z)=(az+b)(cz+d)^{-1}$, $J(\gamma,z)=\det(cz+d)$ とする。今 Γ が torsion-free ならば $X=\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$ は複素多様体となる。Γ の $\mathcal{H}_n\times\mathbb{C}$ への作用を $\gamma\cdot(z,v)=(\gamma(z),J(\gamma,z)^m v)$ $(\gamma\in\Gamma,(z,v)\in\mathcal{H}_n\times\mathbb{C})$ と定義して $E_m=\Gamma\backslash(\mathcal{H}_n\times\mathbb{C})$ とおき、$\pi:E_m\to X$ を $\pi(z,v)=z$ で定義すると (E_m,π) は X の line bundle となる。Siegel modular form $f\in M_m(\Gamma)$ に対して、global section $\varphi_f\in H^0(X,E_m)$ を $\varphi_f(z)=(z,f(z))$ で定義すると、$\mathbb{C}$- 線形同型

$$M_m(\Gamma)\ni f\leftrightarrows\varphi_f\in H^0(X,E_m)$$

を得る。即ち Siegel modular form は line bundle (E_m,π) の global section である。

ところで $G=Sp(n,\mathbb{R})$ は $\mathcal{H}_n$ に推移的に作用しており $z_0=\sqrt{-1}1_n\in\mathcal{H}_n$ の固定部分群 K は G の極大 compact 部分群である。Siegel modular form $f\in M_n(\Gamma)$ に対して G 上の関数 $\tilde{f}:G\to\mathbb{C}$ を

$$\tilde{f}(g)=J(g,z_0)^{-m}f(g(z_0))\quad(g\in G)$$

で定義すると

1) $\tilde{f}(\gamma g) = \tilde{f}(g) \quad \forall\gamma \in \Gamma$,

2) $\tilde{f}(gk) = \delta_m(k)^{-1}\tilde{f}(g) \quad \forall k \in K$

が成り立つ。ここで $\delta_m(k) = J(k, z_0)^m$ は K の 1 次元表現である。このように $M_m(\Gamma)$ の元は G 上の関数と見ることが出来て、ここから保型形式の第二の定義が生ずる。

Hecke 作用素の同時固有関数 局所 compact unimodular 群 G, その compact 部分群 K と閉 unimodular 部分群 Γ, 更に G の中心 $Z(G)$ に対して $\Gamma \cap Z(G)$ の閉部分群 A を取る。Γ の unitary character χ を取り G の既約 unitary 表現 (π, H_π) と K の既約 unitary 表現 (δ, V_δ) は条件

1) $\pi|_K$ における δ の multiplicity は 1,

2) $\pi|_A = \chi|_A$

を満たすとする。

定義 1.1 連続関数 $\varphi : G \to \mathbb{C}$ で条件

1) $\mathrm{supp}\varphi$: compact modulo A,

2) $\varphi(ax) = \chi(a)^{-1}\varphi(x) \quad \forall a \in A$,

3) $\varphi(kxk^{-1}) = \varphi(x) \quad \forall k \in K$,

4) $\dim\delta \int_K \chi_\delta(k)\varphi(kx)dk = \varphi(x) \quad (\chi_\delta(k) = \mathrm{tr}\delta(k))$

を満たすもの全体を $C_c(G/A, \chi, \delta)^0$ とする。$C_c(G/A, \chi, \delta)^0$ は G/A 上の convolution を積として $\mathbb{C}$-代数となる。

$A = \{1\}$, $\delta = \mathbf{1}_K$ のときは $C_c(G/A, \chi, \delta)^0$ は両側 K- 不変な連続関数 $\varphi : G \to \mathbb{C}$ で support compact なもの全体 $C_c(K\backslash G/K)$ と一致する。$G = GL_2(\mathbb{Q}_p)$, $K = GL_2(\mathbb{Z}_p)$ のときは $C_c(K\backslash G/K)$ の元は G 上の convolution により古典的な Hecke 作用素を与えるから、一般に $C_c(G/A, \chi, \delta)^0$ は中心指標 χ, K-type δ の Hecke 作用素の $\mathbb{C}$-代数と呼ばれるべきものである。そこで $C_c(G/A, \chi, \delta)^0$ の元の G/A 上の convolution による作用の同時固有関数（ i.e. Hecke 作用素の同時固有関数）の空間として (π, δ) に対応する G 上の保型形式の空間 $\check{\mathcal{A}}_\delta(\Gamma\backslash G, \chi, \pi)$ を定義する [Ta, Def.5.1]。

$(\pi|_K, H_\pi)$ の δ-isotypic component $H_\pi(\delta)$ への直交射影を $P : H_\pi \to H_\pi(\delta)$ として $\Psi_{\pi,\delta}(x) = P \circ \pi(x) \circ P \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\delta)$ $(x \in G)$ とおく。ここで $(\pi|_K, H_\pi(\delta))$ は (δ, V_δ) と同型だから $H_\pi(\delta) = V_\delta$ と同一視している。更に $\psi_{\pi,\delta}(x) = \mathrm{tr}\Psi_{\pi,\delta}(x)$ とおく。$\psi_{\pi,\delta}$ は unitary 表現 π を特徴付けている [Go]。

定義 1.2 条件

1) $f(\gamma x) = \chi(\gamma)^{-1} f(x)$ for $\forall \gamma \in \Gamma$,

2) $\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d\dot{x} < \infty$,

3) $f(kx) = \delta(k)^{-1} f(x)$ for $\forall k \in K$,

4) $f * \varphi = \widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) f$ for $\forall \varphi \in C_c(G/A, \chi, \delta)^0$

を満たす連続関数 $f : G \to V_\delta$ の成す $\mathbb{C}$-vector space を$\check{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \chi, \pi)$ とする。ここで $f * \varphi$ は G/A 上の convolution である。又

$$\widehat{\psi}_{\pi,\delta}(\varphi) = (\dim \delta)^{-1} \int_{G/A} \varphi(x) \psi_{\pi,\delta}(x) d\dot{x}$$

とおく。$\check{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \chi, \pi)$ は内積

$$(f, g) = \int_{\Gamma\backslash G} (f(x), g(x)) d\dot{x}$$

により Hilbert space となる。

$\check{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \chi, \pi)$ の重要な性質として次のことが成り立つ。まず π, δ の反傾表現を $\check{\pi}$, $\check{\delta}$ として、誘導表現 $\mathrm{Ind}(G, \Gamma; \chi^{-1})$ の $\check{\pi}$-isotypic component の $\check{\delta}$-isotypic component を $\mathrm{Ind}(G, \Gamma; \chi^{-1}; \check{\pi}, \check{\delta})$ と書くと、Hilbert 空間としての同型

$$\check{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \chi, \pi) \bigotimes_{\mathbb{C}} V_\delta^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}(G, \Gamma; \chi^{-1}; \check{\pi}, \check{\delta})$$

が成り立つ。ここで V_δ^* は V_δ の dual space で V_δ と V_δ^* の自然な pairing を $\langle\ ,\ \rangle$ とすると上の同型写像は

$$f \otimes \alpha \mapsto [G \ni x \mapsto (\dim \delta)^{-1/2} \langle f(x), \alpha \rangle \in \mathbb{C}]$$

により与えられる。よって

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \chi, \pi) = \mathrm{Ind}(G, \Gamma; \chi) \text{ における } \pi \text{ の重複度}$$

となる。又、次の定理が成り立つ；

定理 1.3 π が A を法として可積分 (i.e. $\exists u, v \in H$ s.t. $\int_{G/A} |(\pi(x)u, v)| d\dot{x} < \infty$, $u \neq 0$, $v \neq 0$) のとき $\check{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \chi, \delta)$ は連続関数 $f : G \to V_\delta$ で条件

1) $f(\gamma x) = \chi(\gamma)^{-1} f(x)$ for $\forall \gamma \in \Gamma$,

2) $\int_{\Gamma\backslash G} |f(x)|^2 d\dot{x} < \infty$,

3) $\int_{G/A} \Psi_{\pi,\delta}(y) f(xy) d\dot{y} = (\dim \delta) d_\pi^{-1} f(x)$

を満たすもの全体と一致する。ここで d_π は π の formal degree である。

Siegel modular form は$\check{A}_\delta(\Gamma\backslash G, \chi, \delta)$ を用いて次のように特徴付けられる。

Siegel modular forms $G = Sp(n,\mathbb{R})$ は Siegel 上半空間 $\mathcal{H}_n$ に transitive に作用する。$z_0 = \sqrt{-1}1_n \in \mathcal{H}_n$ の固定部分群 K の 1 次元表現 $\delta_m(k) = J(k,z_0)^m$ $(n < m \in \mathbb{Z})$ に対して minimal K-type が δ_m である G の正則離散系列表現 π_m が次のように構成される。まず、誘導表現π_m =Ind$(G,K;\delta_m)$ は局所可積分関数 $\varphi : \mathcal{H}_n \to \mathbb{C}$ で

$$|\varphi|_m^2 = \int_{\mathcal{H}_n} |\varphi(z)|^2 \det(\mathrm{Im} z)^m d(z) < \infty \quad (d(z) = \frac{dxdy}{(\det y)^{n+1}})$$

なる φ のなす Hilbert space $L^2(\mathcal{H}_n, |\cdot|_m)$ 上に

$$(\pi_m(g)\varphi)(z) = J(g^{-1},z)^{-m}\varphi(g^{-1}(z)) \quad (g \in G,\ \varphi \in L^2(\mathcal{H}_n, |\cdot|_m))$$

により実現される。$L^2(\mathcal{H}_n,|\cdot|_m)$ の元で $\mathcal{H}_n$ 上正則なるものは $L^2(\mathcal{H}_n,|\cdot|_m)$ の G-不変閉部分空間 H_m をなし、Ind$(G,K;\delta_m)$ の H_m への制限 (π_m, H_m) が求める G 上の正則離散系列表現である。K の Haar 測度を $\int_K dk = 1$ と正規化して、$G/K = \mathcal{H}_n$ 上に G-不変測度 $d(z) = (\det y)^{-(n+1)}dxdy$ を誘導するように G の Haar 測度を定めると (π_m, H_m) の formal degree d_m は

$$d_m = 2^{-n}(2\pi)^{n(n+1)/2} \prod_{1\le i\le j\le n} \left(m - \frac{i+j}{2}\right)$$

であり

$$\Psi_{\pi_m,\delta_m}(g) = \det\left(\frac{z_0 - \overline{g(z_0)}}{2\sqrt{-1}}\right)^{-m} J(g,z_0)^{-m}$$

となる。又

$$(\pi_m, H_m) : \text{可積分表現} \iff m > 2n$$

である。

$Sp(n,\mathbb{R})$ の合同部分群 Γ に対する weight m の Siegel cusp form の空間を $S_m(\Gamma)$ として Petersson 内積を

$$(f,g) = \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n} f(z)\overline{g(z)} \det(\mathrm{Im} z)^m d(z)$$

とすると次の定理が成り立つ ([Ta, Th.7.1]);

定理 1.4 $m > 2n$ とすると $f \mapsto \tilde{f}$ は内積を保つ線形同型

$$S_m(\Gamma) \rightleftarrows \check{\mathcal{A}}_{\delta_m}(\Gamma\backslash G, \mathbf{1}_\Gamma, \pi_m)$$

を与える。ここで $\mathbf{1}_\Gamma$ は Γ の trivial character である。

このようにして Siegel modular form は vector bundle の global section ともみられるし、Hecke 作用素の同時固有関数ともみられる。

2 テータ関数

実斜交空間 (V, D) に対して W, $W' \subset V$ は最大等方的部分空間で $V = W \oplus W'$ とする。

$$Sp(V) = \{\sigma \in GL_{\mathbb{R}}(V) \mid D(x\sigma, y\sigma) = D(x, y)\ \forall x, y \in V\}$$

として、任意の元 $\sigma \in Sp(V)$ を$\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と表す。ここで $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$, $b \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W')$, $c \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W', W)$, $d \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W')$ は

$$(x, y)\sigma = (xa + yc, xb + yd) \quad \text{for } \forall(x, y) \in V = W \times W'$$

により定義する。pairing $\langle\ ,\ \rangle : W \times W' \to \mathbb{R}$ を $\langle x, y\rangle = D(x, y)$ により定義する。複素化を $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ etc として D や $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{C}$-線形に延長されているとする。

$\mathbb{C}$-線形写像 $S : W_{\mathbb{C}} \to W'_{\mathbb{C}}$ で $\langle x, yS\rangle = \langle y, xS\rangle$ $(\forall x, y \in W_{\mathbb{C}})$ なる S のなす $\mathbb{C}$-vector space を $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}})$ とする。$\mathbb{R}$-vector space $\mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W, W')$ を同様に定義し、$\mathbb{C}$-線形に延長することにより $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}})$ の部分空間と同一視する。

$$\mathrm{Sym}^+_{\mathbb{R}}(W, W') = \{S \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{R}}(W, W') \mid \langle x, xS\rangle > 0\ 0 \neq \forall x \in W\}$$

とおく。Siegel 上半空間

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}, W'_{\mathbb{C}}) \mid \mathrm{Im} z = (z - \overline{z})/(2\sqrt{-1}) \in \mathrm{Sym}^+_{\mathbb{R}}(W, W')\}$$

上に $Sp(V)$ は $\sigma(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}$ $(\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V),\ z \in \mathcal{H})$ により推移的に作用する。

(V, D) の Heisenberg 群 $H[V] = V \times \mathbb{R}$（群演算は $(x,t)\cdot(y,u) = (x+y, t+u+\frac{1}{2}D(x,y))$）上に $Sp(V)$ は $(x,t)^\sigma = (x\sigma, t)$ $((x,t) \in H[V],\ \sigma \in Sp(V))$ により作用して、半直積 $Sp(V)_J = Sp(V) \ltimes H[V]$ (Jacobi 群) が定義される。$Sp(V)_J$ は $\mathcal{H}_J = \mathcal{H} \times W'_{\mathbb{C}}$ 上へ

$$g \cdot (z, w) = (\sigma(z), (w + x\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix})J(\sigma, z)^{-1})$$

$(g = (\sigma, h) \in Sp(V)_J,\ h = (x, t) \in H[V])$ により推移的に作用する。ここで $\sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V)$ に対して $J(\sigma, z) = cz + d \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W'_{\mathbb{C}})$, $(x, y) \in V = W \times W'$ に対して $(x, y)\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = xz + y \in W'_{\mathbb{C}}$ とおく。

$$\begin{aligned} &\eta(g, (z, w)) \\ &= \mathbf{e}\{t + \tfrac{1}{2}D(x, x\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}) + D(x, wJ(\sigma, z)^{-1}) + \tfrac{1}{2}D(w\sigma^{-1}, wJ(\sigma, z)^{-1})\}\end{aligned}$$

$(g=(\sigma,h^\sigma)\in Sp(V)_J,\ h=(x,t)\in H[V],\ (z,w)\in\mathcal{H}_J,\ \mathbf{e}(x)=\exp 2\pi\sqrt{-1}x)$ とおくと

$$\eta(gg',Z)=\eta(g,g'(Z))\eta(g',Z) \text{ for } g,g'\in Sp(V)_J, Z\in\mathcal{H}_J$$

又 $Z=(z,w),\ Z'=(z',w')\in\mathcal{H}_J$ に対して

$$\kappa(Z',Z)=\mathbf{e}(\frac{1}{2}\langle(w'-\overline{w})(z'-\overline{z})^{-1},w'-\overline{w}\rangle)$$

とおくと

$$\kappa(g(Z'),g(Z))=\eta(g,Z')\kappa(Z',Z)\overline{\eta(g,Z)} \quad \text{for } g\in Sp(V)_J,\ Z,Z'\in\mathcal{H}_J$$

となる。これらの関係式は Jacobi 群 $Sp(V)_J$ の Harish-Chandra 分解を考えれば自然に導かれる [Sa]。

theta 関数 $z\in\mathcal{H}$ と $a=(a',a'')\in V=W\times W'$ を取り固定しておく。$\mathbb{Z}$-lattice $\mathcal{L}\subset W$ と $\mathcal{L}'\subset W'$ は条件 $\langle\mathcal{L},\mathcal{L}'\rangle\subset\mathbb{Z}$ を満たすとする。このとき $L=\{xz+y\mid x\in\mathcal{L},\ y\in\mathcal{L}'\}\subset W'_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{Z}$-lattice となる。$W'_{\mathbb{C}}$ 上の正定値 Hermite 形式 H_z を $H_z(v,w)=\langle v(\mathrm{Im}z)^{-1},\overline{w}\rangle$ により定義すると $\mathrm{Im}H_z(x\begin{bmatrix}z\\1\end{bmatrix},y\begin{bmatrix}z\\1\end{bmatrix})=D(x,y)\ (x,y\in V)$ となり、特に H_z は L に関する $W'_{\mathbb{C}}$ 上の Riemann 形式を与える。$W'_{\mathbb{C}}$ 上の二次形式 S_z を $S_z(v,w)=-\langle v(\mathrm{Im}z)^{-1},w\rangle$ により定義し $Q_z=H_z+S_z$ とおく。又

$$\alpha_{z,a}(xz+y)=\mathbf{e}(\frac{1}{2}\langle x,y\rangle-\langle x,a''\rangle+\langle a',y\rangle)\quad(x\in\mathcal{L},\ y\in\mathcal{L}')$$

とおく。このとき theta 関数は次のように定義される；

定義 2.1 正則関数 $\theta: W'_{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ が変換公式

$$\theta(w+u)=\alpha_{z,a}(u)\exp\{\frac{\pi}{2}Q_z(u,u)+\pi Q_z(w,u)\}\theta(w)\quad\forall u\in L$$

を満たすとき L に関する type $(Q_z,\alpha_{z,a})$ の theta 関数と呼ぶ。

L に関する type $(Q_z,\alpha_{z,a})$ の theta 関数のなす $\mathbb{C}$-vector space $\Theta(L;z,a)$ 上には内積

$$(\theta,\theta')=\int_{W'_{\mathbb{C}}}\theta(z)\overline{\theta'(z)}\kappa_z(w,w)d_z(w)$$

が定義される。ここで $d_z(w)=\det(\mathrm{Im}z)^{-1}d(w)$ で

$$\det(\mathrm{Im}z)=\det(\langle u_i,u_j(\mathrm{Im}z)\rangle)_{i,j=1,\cdots,n}$$

$$d(w)=2^{-n}\prod_{j=1}^{n}|dw_j\wedge\overline{dw_j}|\quad\text{for } w=\sum_{j=1}^{n}w_jv_j\in W'_{\mathbb{C}}\quad(w_j\in\mathbb{C})$$

とおく。但し $\{u_1,\cdots,u_n\}$, $\{v_1,\cdots,v_n\}$ はそれぞれ W, W' の $\mathbb{R}$-base で $\langle u_i,v_j\rangle=\delta_{ij}$ を満たすとする。$W'_{\mathbb{C}}$ 上の正則関数

$$\theta_{z,a}(w)=\sum_{\ell\in\mathcal{L}}\mathbf{e}(\frac{1}{2}\langle\ell+a',(\ell+a')z\rangle+\langle\ell+a',w+a''\rangle)$$

に対して $\{\theta_{z,a+(\lambda,0)}|\lambda\in\mathcal{L}^*/\mathcal{L}\}$ は $\Theta(L;z,a)$ の直行 $\mathbb{C}$-基底となる。但し $\mathcal{L}^*=\{x\in W\mid\langle x,\mathcal{L}'\rangle\subset\mathbb{Z}\}$ とする [Ig, Chap.II, Th.4]。

line bundles on abelian varieties 複素 torus $X = W'_{\mathbf{C}}/L$ 上の line bundle は次のように記述される ([Mu, Chap.1]); $W'_{\mathbf{C}}$ 上の Hermite 形式 H と、L から $\mathbf{C}^1 = \{z \in \mathbf{C} | |z| = 1\}$ への写像 α で

1) $\mathrm{Im}H(u,v) \in \mathbf{Z}$ for $\forall u, v \in L$,

2) $\alpha(u+v) = \alpha(u)\alpha(v)\exp\{\pi\sqrt{-1}\mathrm{Im}H(u,v)\}$ for $\forall u, v \in L$

なる pair (H,α) のなす群を $G(X)$ と書く（群演算は $(H,\alpha)\cdot(H',\alpha') = (H+H',\alpha\cdot\alpha')$）。$(H,\alpha) \in G(X)$ に対して作用 $L \curvearrowright W'_{\mathbf{C}} \times \mathbf{C}$ を

$$u\cdot(w,t) = (w+u, t\alpha(u)\exp\{\frac{\pi}{2}H(u,u) + \pi H(w,u)\})$$

$(u \in L,\ (w,t) \in W_{\mathbf{C}} \times \mathbf{C})$ により定義して $E(H,\alpha) = L\backslash(W'_{\mathbf{C}} \times \mathbf{C})$ とおくと、projection $(w,t)(\mathrm{mod}\ L) \mapsto w(\mathrm{mod}\ L)$ により $E(H,\alpha)$ は X 上の line bundle となり、同型

$$G(X) \ni (H,\alpha) \rightleftarrows [E(H,\alpha)] \in \mathrm{Pic}(X)$$

を与える。

さて、Riemann 形式 H_z は偏極 abelian variety $(X,[H_z])$ を与え $(H_z,\alpha_{z,a}) \in G(X)$ である。$\theta \in \Theta(L;z,a)$ に対して global section $\varphi_\theta \in H^0(X, E(H_z,\alpha_{z,a}))$ を

$$\varphi_\theta(w(\mathrm{mod}\ L)) = (w, \theta(w)\exp\{-\frac{\pi}{2}S_z(w,w)\})(\mathrm{mod}\ L)$$

により定めると $\theta \mapsto \varphi_\theta$ は同型

$$\Theta(L;z,a) \rightleftarrows H^0(X, E(H_z,\alpha_{z,a}))$$

を与える。

3 Fock representations

この §では theta 関数を Hecke 作用素の同時固有関数としてとらえる。前の§の記号はそのまま使うことにする。

$K = \{\sigma \in Sp(V) \mid \sigma(z) = z\}$ は $Sp(V)$ の極大 compact 部分群で $G = K \ltimes H[V]$ とおく。G は $Sp(V)_J$ の閉 unimodular 部分群である。G は $W'_{\mathbf{C}}$ 上へ

$$g(w) = (w + x\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix})J(k,z)^{-1} \quad (g = (k,x,t) \in G,\ w \in W'_{\mathbf{C}})$$

により推移的に作用する。又

$$J_z(g,w) = \eta(g,(z,w))^{-1} \quad \text{for } g \in G,\ w \in W'_{\mathbf{C}}$$

とおくと §2 で示した $\eta(g,(z,w))$ の性質から

$$J_z(gg',w) = J_z(g,g'(w))J_z(g',w) \quad \text{for } g,g' \in G,\ w \in W'_{\mathbf{C}}$$

が成り立つ。W, W' 上の Lebesgue 測度 dx, dy を、それぞれ $\mathrm{vol}(W/\mathcal{L}) = 1$, $\mathrm{vol}(W'/\mathcal{L}') = (\mathcal{L}^* : \mathcal{L})$ となるように定める。

$$d_z(w) = dxdy \quad \text{for } w = xz + y \in W'_{\mathbf{C}} \quad (x \in W,\ y \in W')$$

は $W'_{\mathbf{C}}$ 上の G-不変測度である。$H[V]$ 上の Haar 測度を $d((x,y),t) = dxdydt$ により定める。K 上の Haar 測度 dk を $\mathrm{vol}(K) = 1$ となるように定めて $G = K \ltimes H[V]$ 上の Haar 測度 $d(k,h) = dkdh$ を定める。

Fock 表現 G は $W'_{\mathbf{C}}$ に推移的に作用している。$0 \in W'_{\mathbf{C}}$ の固定部分群 $H = \{g \in G \mid g(0) = 0\} = K \times \mathbf{R}$ の unitary 指標 ρ を

$$\rho(h) = J_z(h,0) = \exp(-2\pi\sqrt{-1}t) \quad (h = (k,t) \in H)$$

により定義する。局所可積分関数 $\varphi : W'_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ で

$$|\varphi|^2 = \int_{W'_{\mathbf{C}}} |\varphi(w)|^2 \kappa_z(w,w) d_z(w) < \infty$$

なる φ のなす複素 Hilbert 空間を $L^2(W'_{\mathbf{C}}, z)$ と書くと、誘導表現 $\pi = \mathrm{Ind}(G,H;\rho)$ は $L^2(W'_{\mathbf{C}}, z)$ 上に

$$(\pi(g)\varphi)(w) = J_z(g^{-1},w)^{-1}\varphi(g^{-1}(w)) \quad (g \in G,\ \varphi \in L^2(W'_{\mathbf{C}}, z))$$

により実現される。$L^2(W'_{\mathbf{C}}, z)$ の元で $W'_{\mathbf{C}}$ 上正則なるものは $L^2(W'_{\mathbf{C}}, z)$ の閉部分空間 $\mathcal{H}_z$ をなし、$\mathrm{Ind}(G,H;\rho)$ の $\mathcal{H}_z$ への制限 $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ は G の unitary 表現を与える。$(\pi_z|_{H[V]}, \mathcal{H}_z)$ は Heisenberg 群 $H[V]$ の規約 unitary 表現で、Fock 表現と呼ばれる。特に $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ は G の規約 unitary 表現である。更に $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ は $Z(G)$ を法として G の可積分表現で formal degree は 1 である。

$\pi_z|_K$ の規約分解は次のように与えられる；$W_{\mathbf{C}}$ の ℓ 次対称 tensor 積を $S^\ell(W_{\mathbf{C}})$ として pairing $\langle\ ,\ \rangle : S^\ell(W_{\mathbf{C}}) \times W'_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ を

$$\langle P, w \rangle = \prod_{j=1}^{\ell} \langle v_j, w \rangle \quad \text{for } P = v_1 v_2 \cdots v_\ell \in S^\ell(W_{\mathbf{C}}),\ w \in W'_{\mathbf{C}}$$

により定める。K の $S^\ell(W_{\mathbf{C}})$ 上の表現 Sym_ℓ を

$$\langle \mathrm{Sym}_\ell(k)P, w \rangle = \langle P, wJ(k,z) \rangle \quad (k \in K,\ P \in S^\ell(W_{\mathbf{C}}),\ w \in W'_{\mathbf{C}})$$

により定める。 $P \in S^\ell(W'_{\mathbf{C}})$ に対して

$$\varphi_P(w) = \langle P, w \rangle \kappa_z(w,0)^{-1} = \langle P, w \rangle \exp\{-\frac{\pi}{2}\langle w(\mathrm{Im} z)^{-1}, w \rangle\}$$

とおくと $P \mapsto \varphi_P$ は $S^\ell(W_{\mathbf{C}})$ から $\pi_z|_K$ の Sym_ℓ-isotypic component への K-同型を与える。更に

$$\pi_z|_K = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \mathrm{Sym}_\ell$$

である。特に

$$\varphi_z(w) = \kappa_z(w,0)^{-1} = \exp\{-\frac{\pi}{2}\langle w(\mathrm{Im} z)^{-1}, w\rangle\}$$

は $\mathcal{H}_z$ の長さ 1 の K-不変ベクトルで π_z の trivial K-type の球関数は

$$\Psi_{\pi_z,\mathbf{1}_K}(g) = (\pi_z(g)\varphi_z, \varphi_z) = \kappa_z(0, g(0))^{-1}\overline{J_z(g,0)}^{-1} \quad (g \in G)$$

である。

Hecke 作用素の同時固有関数としての theta 関数　$\Gamma = (\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}') \times \mathbf{R} \subset H[V]$ は $G = K \ltimes H[V]$ の閉 unimodular 部分群である。 Γ の unitary character χ_a を

$$\chi_a((x,y),t) = \mathrm{e}(t + \frac{1}{2}\langle x, y\rangle - \langle x, a''\rangle + \langle a', y\rangle)$$

により定義すると theta 関数 $\theta \in \Theta(L; z, a)$ の変換公式は

$$\theta(\gamma(w)) = \chi_a(\gamma) J_z(\gamma, w)\theta(w) \quad \text{for } \forall\gamma \in \Gamma$$

となる。そこで古典的な保型形式の場合にならって $\theta \in \Theta(L; z, a)$ に対して

$$\tilde{\theta}(g) = J_z(g,0)^{-1}\theta(g(0)) \quad \text{for } g \in G$$

とおくと次の定理を得る；

定理 3.1 対応 $\theta \mapsto \tilde{\theta}$ は内積を保つ $\mathbf{C}$-線形同型

$$\Theta(L; z, a) \rightleftarrows \check{\mathcal{A}}_{\mathbf{1}_K}(\Gamma\backslash G, \chi_a^{-1}, \pi_z)$$

を与える。

注意 3.2 $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ の構成法と $Sp(n, \mathbf{R})$ の正則離散系列表現の構成法を比較すると、$(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ は $G = K \ltimes H[V]$ の正則離散系列表現と呼ばれるべきものである。このようにして Siegel modular form と theta 関数が同じ文脈の中で完全に対照的にとらえられることは興味深い。

4 non-trivial K-type

§3 で与えた $\pi_z|_K$ の分解で Sym_ℓ $(\ell > 0)$ の重複度は 1 だから定義 1.2 に従って $\check{\mathcal{A}}_{\mathrm{Sym}_\ell}(\Gamma\backslash G, \chi_a^{-1}, \pi_z)$ が定義される。この §では $\check{\mathcal{A}}_{\mathrm{Sym}_\ell}(\Gamma\backslash G, \chi_a^{-1}, \pi_z)$ の直交基底を与える。

まず次の条件を満たす W, W' の $\mathbb{R}$-base $\{u_1, \cdots, u_n\}$, $\{v_1, \cdots, v_n\}$ が存在する；

1) $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$,

2) $(\langle u_i, u_j(\mathrm{Im} z)\rangle)_{i,j=1,2,\cdots,n}$ は対角行列で対角成分を $s_1, s_2, \cdots, s_n$ とする。

3) W, W' 上の Lebesgue 測度 $dx = \prod_{j=1}^n d\langle x, v_j\rangle$, $dy = \prod_{j=1}^n d\langle u_j, y\rangle$ により $\mathrm{vol}(W/\mathcal{L}) = 1$, $\mathrm{vol}(W'/\mathcal{L}') = (\mathcal{L}' : \mathcal{L})$ となる。

そこで関数 $\theta_{z,a}^\ell : W'_{\mathbb{C}} \to S^\ell(W_{\mathbb{C}})$ を

$$\begin{aligned}
&\theta_{z,a}^\ell(w) \\
&= \sum_{|\alpha|=\ell} (s^{\alpha/2}\alpha!)^{-1} \sum_{\lambda\in\mathcal{L}} \prod_{j=1}^n H_{\alpha_j}(\sqrt{2\pi s_j}\langle \lambda + a' + (\mathrm{Im} w)(\mathrm{Im} z)^{-1}, v_j\rangle) \\
&\qquad\qquad \times \mathbf{e}(\frac{1}{2}\langle \lambda + a', (\lambda + a')z\rangle + \langle \lambda + a', w + a''\rangle) \cdot P_\alpha
\end{aligned}$$

により定義する。ここで $\sum_{|\alpha|=\ell}$ は $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \ell$ かつ $\alpha \geq 0$ なる $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ 上の和で

$$s^{\alpha/2} = s_1^{\alpha_1/2} \cdot s_2^{\alpha_2/2} \cdots s_n^{\alpha_n/2}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

$$P_\alpha = u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdots u_n^{\alpha_n} \in S^\ell(W_{\mathbb{C}}) \quad \text{for } |\alpha| = \ell$$

とおく。又 $H_m(x)$ は Hermite 多項式で

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \exp(-x^2) = (-1)^m H_m(x) \exp(-x^2)$$

で定義する。$g = hk \in G$ $(h \in H[V],\ k \in K)$ に対して

$$\widetilde{\theta}_{z,a}^\ell(g) = J_z(g,0)^{-1}\mathrm{Sym}_\ell(k)^{-1}\theta_{z,a}^\ell(g(0))$$

とおくと次の定理を得る；

定理 4.1 $\{\widetilde{\theta}_{z,a+(\lambda,0)}^\ell \mid \lambda \in \mathcal{L}^*/\mathcal{L}\}$ は $\check{\mathcal{A}}_{\mathrm{Sym}_\ell}(\Gamma\backslash G, \chi_a^{-1}, \pi_z)$ の直交基底を与える。

5 テータ級数の変換公式

テータ関数を $\check{A}_{\mathbf{1}_K}(\Gamma\backslash G, \chi_a^{-1}, \pi_z)$ の元とみることにより theta 級数

$$\theta_a(z,w) = \theta_{z,a}(w) = \sum_{\ell\in\mathcal{L}} \mathbf{e}(\frac{1}{2}\langle \ell + a', (\ell + a')z\rangle + \langle \ell + a', w + a''\rangle)$$

の変換公式の自然な証明が得られる。

$\tau = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Sp(V)$ は条件

1) $(\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}')\tau = \mathcal{L}\oplus\mathcal{L}'$,

2) $\langle xa + yc, xb + yd\rangle \equiv \langle x, y\rangle \pmod{2\mathbf{Z}}$ for $\forall(x,y)\in\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'$

を満たすとする。$z' = \tau(z) \in \mathcal{H}$ として

$$K' = \{\sigma \in Sp(V) \mid \sigma(z') = z'\} = \tau K \tau^{-1}$$

$$G' = K' \ltimes H[V] = \tau G \tau^{-1} \subset Sp(V)_J$$

とおく。$\tau\Gamma\tau^{-1} = \Gamma \subset Sp(V)_J$ で

$$\chi_a(\tau^{-1}\gamma\tau) = \chi_{a\tau^{-1}}(\gamma) \quad \text{for } \forall\gamma\in\Gamma$$

が成り立つ。$\varphi \in \mathcal{H}_{z'}$ に対して

$$\varphi^\tau(w) = \eta(\tau, (z,w))\varphi(wJ(\tau,z)^{-1}) \quad (w \in W'_{\mathbf{C}})$$

とおくと $\kappa_z(w', w)$ の変換公式から $\varphi \mapsto \varphi^\tau$ は unitary 同型 $\mathcal{H}_{z'} \stackrel{\sim}{\to} \mathcal{H}_z$ を与え、$\eta(g,(z,w))$ が保型因子であることから

$$(\pi_{z'}(\tau g \tau^{-1})\varphi)^\tau = \pi_z(g)\varphi^\tau \quad \text{for } \forall g\in G,\ \forall\varphi\in\mathcal{H}_{z'}$$

が成り立つ。以上のことから次の定理を得る；

定理 5.1 $f \in \check{A}_{\mathbf{1}'_K}(\Gamma\backslash G', \chi_{a\tau^{-1}}^{-1}, \pi_{z'})$ に対して $f^\tau(x) = f(\tau x \tau^{-1})$ $(x\in G)$ とおくと $f \mapsto f^\tau$ は内積を保つ $\mathbf{C}$-線形同型

$$\check{A}_{\mathbf{1}'_K}(\Gamma\backslash G', \chi_{a\tau^{-1}}^{-1}, \pi_{z'}) \stackrel{\sim}{\to} \check{A}_{\mathbf{1}_K}(\Gamma\backslash G, \chi_a^{-1}, \pi_z)$$

を与える。

さて $\check{A}_{\mathbf{1}'_K}(\Gamma\backslash G', \chi_{a\tau^{-1}}^{-1}, \pi_{z'})$ の直交 $\mathbf{C}$-基底 $\{\tilde{\theta}_{z',a\tau^{-1}+(\lambda,0)} \mid \lambda \in \mathcal{L}^*/\mathcal{L}\}$ に定理 5.1 を用いれば

$$\tilde{\theta}_{z',a\tau^{-1}+(\lambda,0)}(\tau g \tau^{-1}) = \sum_{\mu\in\mathcal{L}^*/\mathcal{L}} c_{\mu,\lambda}(\tau,z)\tilde{\theta}_{z,a+(\mu,0)}(g)$$

$(g \in G,\ c_{\mu,\lambda}(\tau, z) \in \mathbb{C})$ と書ける。通常の theta 級数として書けば

$$\exp\{-\pi\sqrt{-1}D(w\tau^{-1}, wJ(\tau, z)^{-1})\} \times \theta_{a\tau^{-1}+(\lambda,0)}(\tau(z), wJ(\tau, z)^{-1}) \\ = \sum_{\mu\in\mathcal{L}^*/\mathcal{L}} c_{\mu,\lambda}(\tau, z)\theta_{a+(\mu,0)}(z, w) \quad (w \in W'_{\mathbb{C}}) \tag{1}$$

となる。ここから通常の議論 ([Ig, p.83-84]) により $\theta_{a+(\lambda,0)}(z, w)$ $(\lambda \in \mathcal{L}^*/\mathcal{L})$ の変換公式を得る。

注意 5.2 theta 級数の変換公式の証明では関係式 (1) が成り立つことが一つのキーポイントである。[Ig] では (z, a) と $(\tau(z), a\tau^{-1})$ に対応する abelian variety と line bundle が同型であることから関係式 (1) を導くのである。一方、本講では定理 5.1 の直接の帰結として関係式 (1) が得られるのであるが、定理 5.1 の根拠は G-equivariant map $\mathcal{H}_{z'} \ni \varphi \mapsto \varphi^\tau \in \mathcal{H}_z$ にある。ところで、この G-equivariant map は誘導表現 $\mathrm{Ind}(G, H; \rho)$ と $\mathrm{Ind}(\tau G\tau^{-1}, \tau H\tau^{-1}; \rho^\tau)$ $(\rho^\tau(h) = \rho(\tau^{-1}h\tau))$ の間の自明な G-equivariant map から生ずるのである。このようにして関係式 (1) の幾何学的根拠と並んで表現論的根拠が得られることは興味深い。

参考文献

[Go] Godement,R.: "A theory of spherical functions" Trans.Amer.Math.Soc. 73 (1952) 496-556

[Ig] Igusa,J.-I.: "Theta functions" Springer-Verlag (1972)

[Mu] Mumford,D.: "Abelian Varieties" Oxford Univ. Press (1970)

[Sa] Satake,I.: "Factors of Automorphy and Fock Representations" Adv.in Math. 7 (1971) 83-110

[Ta] Takase,K.: "A note on automorphic forms" J.Reine Angew.Math. 409 (1990) 138-171